Tema 5

Composición de aplicaciones. Factorización canónica de una aplicación.

Nivel.

No se explica actualmente el tema como tal en la enseñanza media. En un futuro su ubicación podría situarse en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (2º ciclo) si bien estimamos, a título personal, que así como el concepto de correspondencia y aplicación sí debe ser asimilado por los alumnos por sus muchas aplicaciones e implicaciones dentro de las Matemáticas, el concepto de aplicación compuesta y factorización de una aplicación debería reservarse para un curso como el COU o su equivalente.

Objetivos.

El objetivo general del tema es el que los alumnos afiancen bien el concepto de aplicación compuesta; su no conmutatividad, en general, así como la forma de llevar a cabo la factorización de una aplicación y sus consecuencias.

Como objetivos específicos podemos citar los siguientes:

El alumno:

1. Debe repasar los conceptos de conjunto producto cartesiano, correspondencia y aplicación.
2. Deberá manejar los tipos de aplicaciones y sus características.
3. Distinguirá sin dudar los conceptos de conjunto original, conjunto imagen, conjunto inicial y conjunto final.
4. Deberá calcular dadas dos aplicaciones sencillas f y g, las aplicaciones compuestas f o g y g o f.
5. Sabrá estudiar el tipo de aplicación que es la compuesta y realizará ejercicios para investigar si el tipo de aplicaciones que son las aplicaciones componentes influye en ese sentido.
6. Deberá manejar el concepto de factorización canónica de una aplicación y conocer sus implicaciones y la factorización de homomorfismos entre las distintas estructuras algebraicas.

Contenidos.

Serían los siguientes:

1. Concepto de aplicación entre dos conjuntos. Concepto de aplicación inversa.
2. Tipos de aplicaciones.
3. Composición de aplicaciones. La operación «o». Propiedades de la composición de aplicaciones. Utilidad de la operación «o».
4. Relación de equivalencia asociada a una aplicación. Clase de equivalencia. El conjunto cociente.
5. Factorización canónica de una aplicación. Diagrama. Aplicaciones de la factorización canónica de una aplicación a la factorización de homomorfismos entre grupos, anillos y cuerpos (opcionalmente).

Metodología.

La transmisión oral clásica de los distintos conocimientos del tema por parte del profesor hacia los alumnos no suele ser, por desgracia, demasiado eficaz como puede constatarse día

a día en las aulas. Los grupos de alumnos no son homogéneos en cuanto a conocimientos previos y, además, es sabido que a una misma edad cronológica no corresponde siempre una misma edad mental. Todas estas premisas provocan el que el mensaje transmitido por el profesor se haga ininteligible para muchos o, al menos, algunos de sus alumnos. El profesor en ese sentido deberá esforzarse y prestar muchísima atención a los procesos sicológicos y evolutivos de sus alumnos lo cual puede en cierta manera conseguirse estrechando la relación profesor-alumno dentro de lo que la ratio actual permite.

En ese orden el profesor habrá de esforzarse también para contestar a las dudas individuales de los alumnos y fomentará el diálogo en la clase de Matemáticas pues es la única manera de que los alumnos menos aventajados puedan salir adelante. Evitará asimismo un excesivo proteccionismo sobre los alumnos que pudiera coartar la iniciativa de éstos. Téngase en cuenta que no se es mejor profesor por desmenuzar demasiado la materia que se está explicando. Hay que buscar un buen equilibrio en concordancia con el rigor que la asignatura permita.

Actividades.

1. Dadas una serie de aplicaciones ver si son inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
2. Dadas una aplicaciones f y g calcular f o g y g o f, estudiando qué tipos de aplicaciones son.
3. Factorización canónica de diversas aplicaciones calculando explícitamente las aplicaciones componentes de la factorización.

Evaluación.

Se valorarán y cuantificarán los aspectos cognitivos del alumnado acerca del tema objeto de estudio así como su mayor o menor capacidad de análisis y síntesis. Estimamos evaluar el tema conjuntamente una vez visto el tema de correspondencias y aplicaciones mediante la realización de un control escrito que, además de la resolución de problemas, muestre la facilidad que tiene el alumno para expresar ciertos conceptos con sus propias palabras.

Actividades de recuperación.

Serán de idéntica naturaleza a las ya mencionadas en el apartado de evaluación. Corresponderá al profesor suministrar las bases teóricas y prácticas a los alumnos para que éstos puedan repasar los conceptos vistos en clase de la manera menos dificultosa para ellos. En este sentido estimamos como fundamental que el alumno lleve al día su cuaderno de trabajo personal.

Recursos didácticos.

- Cuaderno de trabajo personal.
- Pizarra.
- Fichas-resumen.
- Diagramas de flechas.
- Bibliografía sobre Algebra Lineal (opcional).

Temporalización.

Debe dedicarse al tema una semana de clase diaria aproximadamente, si bien debe haber flexibilidad en el sentido de que no debe temerse alargar un poco el tema si va en beneficio de la comprensión por parte del alumnado.

Tema 6

Operación entre los elementos de un conjunto (ley de composición interna). Propiedades. Homomorfismo entre dos conjuntos provistos de ley de composición interna.

Nivel.

Este tema se puede tratar actualmente en 1º de B.U.P. al estudiar determinadas estructuras algebraicas; también se desarrolla en F.P.1, 1º curso. En un futuro estimamos que debe ser desarrollado a lo largo del curso 1º de Bachillerato en las dos modalidades: Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y Tecnología.

Objetivos.

Entre los objetivos principales se pueden excitar:

1º Entender el concepto de operación, sabiendo distinguir entre operación interna y operación externa.

2º Saber aplicar el concepto de operación a casos prácticos.

3º Manejar con soltura las propiedades de la operación:

a) Sabiendo que no todo elemento de un conjunto tiene simétrico.

b) Que no tiene porqué existir elemento neutro, y en caso de existir sería único.

c) Sabiendo que es un elemento conmutable y regular.

d) Que el elemento simétrico es único, y no todo elemento de un conjunto tiene que tener elemento simétrico.

4º Asociar las propiedades de la operación interna a propiedades de las operaciones suma y producto de estructuras conocidas como N, Z, Q, R.

5º Conocer que el conjunto cociente posee una operación interna que se deduce del conjunto de partida.

6º Saber qué es un homomorfismo, y sus clases.

Contenidos.

1º Repaso de teoría de conjuntos, exponiendo el producto cartesiano y las aplicaciones entre conjuntos.

2º Repaso del concepto de relación de equivalencia, y clases de equivalencia.

3º Definir qué es una ley de composición sobre un conjunto, y clasificarla en interna y externa.

4º Ver las propiedades de una ley de composición interna (asociativa, conmutativa, uniforme). Obtener el elemento neutro, el simétrico de un elemento, y los elementos regulares con respecto a la ley de composición.

5º Definir la ley de composición sobre un conjunto cociente A/R, donde R es una relación de equivalencia.

6º Explicar qué es un retículo.

7º Definir qué es un homomorfismo. Imagen de un homomorfismo. Propiedades y clases de homomorfismos.

Metodología.

La metodología a seguir tiene que ser activa por parte del alumno. Puesto que este tema es abstracto, para el nivel de maduración matemática del alumno, se deben exponer los

contenidos de manera clara y sencilla, poniendo ejemplos en todos momento.

Una vez expuestos los contenidos, el alumno tiene que trabajar con problemas semejantes para afianzar los conocimientos.

Actividades.

Las actividades a realizar han de ir encauzadas para cumplir los objetivos anteriormente mencionados, y creciendo en dificultad progresivamente. Citaremos algunas actividades como ejemplo:

1º Comprobar que la operación suma y producto de dos números (naturales, enteros, racionales y reales) es una operación interna.

2º Aplicación del factor común en casos concretos. Como ejemplo hallar 175 x 96 + 175 x 4

3º Aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa reordenando los factores de modo conveniente para realizar mentalmente algunos productos. Como ejemplo 5 x 17 x 2

4º Realización conjunta de sumas, productos y divisiones con fracciones. Como ejemplo:

$$\frac{(2/3 + 1) \times 3}{1 + 1/2}$$

5º Demostrar que algunas aplicaciones son endomorfismos. Como ejemplo; demostrar que la aplicación h: (R -{0}, .) en (R -{0}, .) definida por h (y) = y . y, es un andomorfismo.

6º Problema para una clase avanzada: se considera la ley interna x * y sobre el cuerpo de los racionales dada por x * y = x + y + x . y (+ y representan la adición y multiplicación usuales de números racionales, respectivamente). Se pide:

a) Ver si esta ley de composición tiene las propiedades conmutativa y asociativa.

b) ¿Todos los elementos racionales tienen elemento simétrico respecto a ella?

Evaluación.

Se realizará un seguimiento continuo e individualizado de cada alumno, intentando ayudar más a los alumnos que vayan más retrasados.

Se valorará la participación en clase y el trabajo en grupo.

Posteriormente se hará una prueba de conocimientos, desarrollando problemas análogos a los realizados en clase.

Recuperación.

Los criterios serán idénticos a los establecidos durante la evaluación.

Se repartirán a los alumnos problemas con solución a fin de que puedan repasar los conocimientos explicados en clase.

Recursos didácticos.

Se emplearán juegos didácticos para afianzar, motivando a los alumnos, las propiedades de los números naturales, enteros y racionales.

Cuaderno de trabajo personal y pizarra.

También se emplearán programas de ordenador con el mismo fin anterior.

Temporalización.

Por tratarse de un tema cuyo contenido forma parte de otros, el tiempo de dedicación admite un cierto margen de flexibilidad. Estimamos que serán necesaria seis sesiones de una hora en las que la explicación del profesor será aproximadamente de un cuarto de hora, y el resto del tiempo trabajarán los alumnos en grupo y habrá puesta en común.

Tema 7

Grupos. Subgrupos normales. Grupo cociente. Homomorfismos entre grupos.

Nivel.

Este tema no es tratado actualmente como tal en las Matemáticas de la Enseñanza Media, aunque sí se puede hacer referencia a la estructura algebraica de grupo en gran cantidad de cuestiones como la teoría de los números, las matrices o las traslaciones del plano.

Se podría incluir en el COU (17-18 años) y en un futuro Bachillerato de Ciencias y en el Tecnológico, como un capítulo suplementario de preparación a posteriores estudios universitarios.

Aquí se va a exponer la programación didáctica para el nivel del actual COU.

Objetivos.

Como objetivo general se pretende introducir al alumno en una de las más fundamentales estructuras algebraicas de toda la Matemática.

Como objetivos específicos se pretende que el alumno, una vez concluida esta unidad temática, sea capaz de:

1. Entender el proceso de abstracción que supone, partiendo de unos conjuntos soportes distintos con sus respectivas operaciones y después de comprobar que cumplen idénticas propiedades, definir un concepto abstracto que llamamos estructura algebraica.
2. Conocer diversas propiedades axiomáticas que definen una misma estructura algebraica de grupo.
3. Encontrar algunos ejemplos de conjuntos conocidos: Números enteros, reales, matrices, etc, que con ciertas operaciones doten al conjunto de estructura de grupo.
4. Reconocer si una ley de composición definida en un conjunto finito por una tabla de doble entrada (tabla de Cayley) posee estructura de grupo.
5. Tener conocimiento del papel fundamental que la teoría de grupos juega en diversos dominios de la Física, como son: El estudio de vibraciones moleculares, cristalografía, mecánica cuántica, etc.

Contenidos.

1. Definición y propiedades fundamentales de los grupos.
   - 1.1. Introducción.
   - 1.2. Definición de los grupos.
   - 1.3. Propiedades fundamentales de los grupos.
   - 1.4. Nueva definición de los grupos.
2. Complementos. Ilustración de la noción de grupo.
   - 2.1. Ejemplos de grupos.
   - 2.2. Ejemplos de leyes que no son leyes de los grupos.
   - 2.3. Grupos aditivos y multiplicativos.
3. Subgrupos.
   - 3.1. Definición y caracterización.
   - 3.2. Ejemplos. Incluir el conjunto Z/p de los enteros módulo p.
4. Homomorfismo de grupos.
   - 4.1. Definición.
   - 4.2. Núcleo del homomorfismo.

Metodología.

La metodología ha de ser activa y participativa.

El alumno ha de ser guiado en la búsqueda y redescubrimiento de la Matemática para interesarse por ella.

Como todas las nociones fundamentales, la comprensión de la idea de «grupo» debe liberarse de la formulación particular que sirve para definirla.

No se trata de que el alumno memorice las diversas propiedades axiomáticas de la teoría de grupos o de subgrupos, cosa que sólo contribuiría a aumentar su contenido memorístico, sino que el profesor a partir de ejemplos y situaciones de la realidad, haga penetrar al alumno en la verdadera «filosofía» del concepto de grupo.

Actividades.

Van dirigidas a la consecución de los objetivos ya citados.

1. Comenzar desarrollando varios conjuntos muy diversos con sus respectivas operaciones, como podrían ser:

a) Las traslaciones en el plano (definiendo el compuesto de dos traslaciones como el vector suma de cada una de ellas).
b) En el conjunto X = {1, 2, 3 }, el conjunto de todas las permutaciones o biyecciones con la ley de composición de las aplicaciones y
c) El conjunto Z de los números enteros con la operación suma.

Se puede dividir la clase en tres grupos de trabajo que estudien las propiedades de las operaciones definidas anteriormente y que concluyan las analogías entre ellas.

2. Pasar a continuación a definir las propiedades axiomáticas y dar otras propiedades que caracterizan la misma estructura, para hacer entender que la definición de grupo no es única.
3. Ilustrar la noción de grupo con contra - ejemplos (la adición en N, la sustracción en Z, la unión definida en el conjunto de las partes de un conjunto A no vacío, etc).
4. Proponer ejercicios con diversas estructuras para estudiar si son grupos.

Ej. (2Z, +) con $2Z = \{2z / z \in Z\}$
(P(A), Δ) con P(A) conjunto de las partes de un conjunto A no vacío y Δ, la diferencia simétrica

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

5. Estudiar las propiedades de las leyes de composición interna en conjuntos finitos mediante tablas de doble entrada. Referencia a (Z/3, +)
6. Estudiar la aplicación logaritmo entre $(R^+, .)$ y (R, +).

$$\log (x.y) = \log x + \log y$$

que conserva las operaciones y es un homomorfismo biyectivo y, por lo tanto, un isomorfismo.
7. Describir la relación entre la teoría de grupos y la física.

Evaluación.

Se tendrá en cuenta el trabajo y participación de los alumnos en clase, así como su integración en los posibles grupos de trabajo.

De incluir algún ejercicio en cualquier examen de evaluación, sería muy semejante a los resueltos en clase.

Recuperación.

El profesor puede preparar una batería de ejercicios con sus soluciones para repasar lo trabajado en clase.

El profesor dedicará algún periodo a responder a las posibles dudas concretas sobre el tema en cuestión.

Recursos didácticos.

Se podrían presentar ciertas transparencias en color ilustrando la teoría, para inspirar al alumno y facilitar su comprensión.

Se seguirá utilizando el material clásico, pizarra, cuaderno de trabajo, útiles de dibujo, etc.

Temporalización.

Este tema desarrollado en el nivel de COU, precisaría cinco o seis periodos lectivos (1 hora aproximadamente) y un trabajo práctico del alumno a desarrollar en grupo.

Tema 8

Anillos ideales. Anillo cociente. Homomorfismos entre anillos.

Nivel.

No se imparte actualmente el tema en la Enseñanza Media y creemos que tampoco se va a impartir, ni siquiera en un futuro, en los bachilleratos específicos. Es un tema perteneciente claramente a un primer curso de Algebra Lineal, es decir a un primer curso dentro de la Enseñanza Universitaria que es el momento adecuado para que los alumnos puedan asimilar bien el tema.

Objetivos.

El objetivo general es el de que el alumno avance en el estudio de las estructuras algebraicas fundamentales, comenzando a trabajar simultáneamente con dos leyes de composición internas. Como objetivos específicos podemos citar los siguientes:

El alumno debe:

1. Conocer el concepto de operación o ley de composición interna y estará al corriente de las distintas propiedades que puede cumplir una tal operación.
2. Saber reconocer las propiedades características de un anillo distinguiendo perfectamente los conceptos de operar por la izquierda y por la derecha, caso de que no se dé conmutatividad.
3. Manejar las definiciones de subanillo e ideal y sabrá la implicación entre ambas ideas.
4. Sabrá clasificar un ideal.
5. Conocer la estructura de anillo cociente y saber las condiciones que se deben dar para que el anillo cociente pueda ser cuerpo.
6. Saber construir homomorfismos entre anillos, clasificarlos y calcular núcleo e imagen.
7. Manejar con soltura la factorización canónica de un homomorfismo entre anillos.

Contenidos.

Serán los siguientes:

1. Repaso del concepto de operación o ley de composición interna.
2. La estructura de anillo: Propiedades que deben cumplir las dos leyes de composición interna. Propiedades de los elementos de un anillo.
3. Concepto de subanillo. Condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de un anillo sea subanillo.
4. Divisores de cero. Anillo de integridad. Dominio de integridad.
5. Concepto de ideal. Tipos de ideales. Ideales principales. Ideales primos.
6. El anillo cociente. Operaciones en un anillo cociente.
7. Homomorfismos entre anillos. Núcleo de un homomorfismo entre anillos. Factorización canónica de un homomorfismo entre anillos.

Metodología.

Es una cuestión enormemente debatida la de si deben introducirse y manejarse las estructuras algebraicas en el Bachillerato. En este sentido las opiniones son muy diversas

pues hay quien dice que los alumnos en realidad ya las "conocen" en su etapa de E.G.B. Hay otros que dicen que debería dárseles meramente un tratamiento secundario e instrumental. Hay incluso otros que rechazan abiertamente su empleo pues dudan de la capacidad de los alumnos para asimilarlas.

Si hemos de pronunciarnos en alguno de estos sentidos somos partidarios de hacer una pequeño introducción en COU (o su equivalente en el futuro) pues, por ejemplo, hemos de ver en dicho curso la estructura de espacio vectorial que, es conocido, está construida sobre un grupo abeliano y por otro lado es en este curso donde se va a abordar en serio el estudio de $\Re$ y seguro que al profesor se le escapa lo de «sea el cuerpo de los números reales» y, evidentemente, algún alumno ha de preguntarnos que a qué viene eso de cuerpo.

Por lo demás el profesor intentará que los alumnos manejen bibliografía apropiada, que él como experto en la materia debe suministrarles insistiendo a la vez en que los estudiantes se vayan acostumbrando a leer textos de matemáticas.

La experiencia pedagógica en matemáticas pone de manifiesto que, en general, una buena parte de los fracasos en matemáticas provienen del desconocimiento del simbolismo y el lenguaje propios de esta asignatura. En este sentido, y dentro del nivel donde hemos enmarcado el tema, los alumnos deberán hacer un esfuerzo para asimilar la forma específica de expresión utilizada por el álgebra lineal y el profesor habrá de hacer también un esfuerzo de paciencia en este sentido, pues quizás el lenguaje algebraico resulte al principio un poco engorroso para gran parte de los alumnos.

Actividades.

Como ejemplos citaremos los siguientes:

1. Dada una ley de composición interna estudiar las propiedades que cumple.
2. Dado un conjunto dotado de dos leyes de composición internas ver si cumple las necesarias propiedades para tener estructura de anillo y en caso afirmativo, estudiar si es anillo de integridad.
3. Dado un subconjunto de un anillo ver si es subanillo.
4. Dado un subconjunto de un anillo estudiar si es ideal y clasificarlo.
5. Estudiar los ideales de Z.
6. Ejercicios sobre la divisibilidad en un anillo de integridad.
7. Construcción de homomorfismos entre dos anillos estudiando el tipo de homomorfismo de que se trata.
8. Calcular núcleo e imagen de un homomorfismo entre anillos.
9. Estudiar las condiciones que deben darse para que un conjunto cociente del tipo Anillo/ideal sea un cuerpo.
10. Ejercicios sobre aplicación de ideales a la teoría de la divisibilidad.
11. Ejercicios sobre dominios de integridad.

Evaluación.

Se valorará el progreso realizado por los alumnos en el estudio de las estructuras algebraicas y pensamos sería conveniente que la realización de la prueba escrita se realizara una vez estudiadas las estructuras de grupo, anillo y cuerpo con objeto de medir la capacidad de los alumnos para relacionar conceptos.

Se tendrá en cuenta asimismo la capacidad del alumnos para manejar bibliografía y su mayor o menor comprensión del lenguaje algebraico. Es importante y debe ser evaluable dentro de las posibilidades que proporcione la ratio profesor-alumno, la actitud del alumno hacia la asignatura.

Actividades de recuperación.

El profesor se encargará de preparar una hojas de trabajo para los alumnos que tengan que recuperar, con el siguiente esquema:

a) Resumen teórico de los principales aspectos del tema.
b) Ejercicio de aplicación inmediata.
c) Problemas tipo.
d) Problemas no inmediatos con indicación específica de su grado de dificultad, en sentido creciente y provistos de sus correspondientes soluciones.

La recuperación en su momento se llevará a cabo siguiendo idénticas premisas a las ya expuestas en los apartados de metodología y evaluación y se evitará realizarla hasta que el profesor no considere que ha pasado el tiempo necesario para que los alumnos hayan po-

Tema 9

Cuerpos. ideales de un cuerpo. Homomorfismos entre cuerpos. El cuerpo de las fracciones de un anillo de integridad.

Nivel.

El presente tema no se imparte como tal en la actual Enseñanza Secundaria y tampoco pensamos puede impartirse en el futuro. Unicamente se hace una ligera mención a la estructura de cuerpo al estudiar el conjunto de los números reales en COU. Es claramente un tema que pertenece a un primer curso de Algebra Lineal de la Enseñanza Universitaria.

Objetivos.

El objetivo general del tema es que el alumno conozca la estructura algebraica del cuerpo y sus propiedades. Como objetivos específicos podemos citar los siguientes:

El alumno será capaz de:

1. Manejar el concepto de operación o ley de composición interna y en base al estudio de las propiedades que puede cumplir, reconocer las estructuras algebraicas de grupo, anillo y cuerpo.
2. Manejar la definición de ideal de un cuerpo y sus propiedades reconociendo un ideal maximal de otro que no lo es.
3. Manejar la definición de homomorfismo entre cuerpos y los distintos tipos existentes prestando especial atención a cuando dos cuerpos son isomorfos.
4. Conocer la estructura de dominio de integridad manejando con soltura sus propiedades y, en especial, el estudio del problema de la divisibilidad en el cuerpo de fracciones de un anillo de integridad.

Contenidos.

Pueden ser los siguientes:

1. Repaso del concepto de operación o ley de composición interna.
2. Definición de la estructura algebraica de cuerpo: Propiedades. Consecuencia de la definición de cuerpo.
3. Definición de ideal de un cuerpo.
4. El dominio de integridad: Propiedades. El anillo cociente dotado de estructura de cuerpo. Característica de un cuerpo.
5. El problema de la divisibilidad de un cuerpo.
6. Concepto de subcuerpo y propiedades. Homomorfismos entre cuerpos. Propiedades.
7. El cuerpo de las fracciones sobre un dominio de integridad. Propiedades.

Metodología.

El álgebra lineal de COU es realmente la primera oportunidad seria que se presenta en la Enseñanza Media de ofrecer un desarrollo coherente de esta teoría. No obstante, estimamos personalmente que no debe explicarse la teoría de estructuras algebraicas dejándose ésta para un primer curso de Enseñanza Universitaria que es cuando los alumnos podrán realmente asimilar bien los conceptos de grupo, anillo, cuerpo, dominio de integridad, etc.

El profesor tendrá en cuenta que las matemáticas es una asignatura difícil tanto de enseñar como de aprender quizás debido a su jerarquización en el sentido de que la posibili-

dido repasar bien todos los conceptos y que como consecuencia puedan superar los objetivos mínimos.

Recursos didácticos.

- Una buena bibliografía sobre el tema (cualquier libro clásico de Algebra Lineal puede ser válido).
- Colección de problemas resueltos.
- Apuntes teóricos.
- Cuaderno de trabajo personal.
- Resúmenes teóricos del conjunto de todas las estructuras algebraicas.

Temporalización.

Los temarios de Algebra Lineal que se imparten actualmente en un primer curso de Enseñanza Superior sobre todo en las ciencias experimentales son de una gran densidad. Según esto, el estudio de la estructura algebraica de anillo y las consecuencias que de ello se derivan debería verse en 3 ó 4 periodos lectivos para pasar a continuación directamente a la estructura de cuerpo.

Tema 10

El conjunto de los números naturales. Construcción. Propiedades.

Nivel.

El tema se estudia actualmente en FP-1, 1º curso; se repasa (pues es conocido de la etapa de E.G.B.) en 1º de BUP (14-15 años). En el futuro el tema deberá impartirse en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, pensamos que mediante coordinabilidad.

Objetivos.

El objetivo general del tema es el de que el alumno sepa de la existencia de los llamados números naturales y las posibilidades diferentes que existen acerca de la construcción del conjunto N, y como objetivos específicos podemos citar los siguientes:

El alumno:

1. Deberá estar al corriente de qué es una teoría axiomatizada.
2. Deberá conocer la construcción del conjunto N mediante los axiomas de Peano.
3. Manejará con soltura las operaciones con números naturales definidos mediante los axiomas de Peano.
4. Conocerá el concepto de coordinabilidad y sabrá demostrar que ésta es una relación de equivalencia.
5. Estará al tanto de la construcción de N mediante coordinabilidad y conocerá las propiedades fundamentales de las operaciones entre naturales.
6. Sabrá distinguir conjuntos finitos de infinitos.
7. Manejará la idea de conjuntos numerables y de entre los principales conjuntos numéricos N, Z, Q y R sabrá cuáles son numerables y cuáles no.

Contenidos.

Podrían ser los siguientes:

1. Distintas formas de construir el conjunto de los números naturales.
2. Construcción axiomática de N. Axiomas de Peano. Teoremas fundamentales.
3. Operaciones con números naturales. Teorema de recurrencia y de recurrencia generalizado. Suma de números naturales: Propiedades. Multiplicación de números naturales: Propiedades.
4. Construcción de N por la relación de coordinabilidad entre conjuntos. Definición de conjuntos coordinables. La coordinabilidad como relación de equivalencia. El conjunto cociente.
5. Operaciones con números naturales: Suma y producto en términos de coordinabilidad.
6. Estudio del orden en N. Conjuntos ordenados y número ordinal.
7. Conjuntos finitos e infinitos.
8. Conjuntos numerables.

Metodología.

Se supone conocido al empezar el tema la noción de conjunto en su forma axiomática así como el concepto de cardinal.

Lo normal es que los alumnos a pesar del salto brusco que supone el paso de la E.G.B., a la Enseñanza Media tengan ya completamente asimilado el concepto de número natural si bien no está de más dedicar 3 ó 4 periodos lectivos al repaso de dicho concepto sentando así las bases para la posterior introducción de los demás tipos de números, enteros, racionales, de forma cíclica y progresiva.

El profesor deberá mantener una serie de pautas constantes en su modo de enseñar, por ejemplo, deberá huir de -con su formalización excesiva- aburrir a los alumnos evitando con ello que en éstos se genere un sentimiento de abandono hacia la asignatura.

Asimismo el profesor deberá tener en cuenta la no homogeneidad de los estudiantes que tiene a su cargo y deberá adaptarse a ello.

dad de pasar de un concepto a otro depende de una buena comprensión de las cuestiones anteriores. En este orden, malamente un alumno puede comprender bien la estructura de cuerpo con sus dos leyes de composición si antes no ha comprendido la estructura de grupo y de ley de composición interna.

Corresponderá al profesor el presentar el tema no como un conjunto de conocimientos acabados y cerrados. Deberá cuidar de no verter sobre los alumnos un mensaje excesivamente abstracto y lleno de un vocabulario complejo.

La metodología a seguir habrá de ser: individualizada, en el sentido de ofrecer un mismo estímulo común para que los alumnos trabajen individualmente o en grupo; activa, para que el alumno llegue a adquirir los conceptos por sí mismo, considerando su aprendizaje como un proceso continuo y constructivista.

Actividades.

A título de ejemplo mencionaremos las siguientes:

1. Trabajar con diversas leyes de composición internas estudiando sus propiedades.
2. Demostraciones acerca de si un conjunto dotado de dos leyes de composición interna es o no un cuerpo.
3. Demostrar si un subconjunto de un cuerpo tiene o no estructura de ideal, y en caso afirmativo ver si es ideal maximal.
4. Construcción de homomorfismos entre cuerpos calculando el núcleo y la imagen del homomorfismo en base a distinguir el tipo de homomorfismo de que se trata.
5. Problemas sobre divisibilidad en un cuerpo.

Evaluación.

Es claro que la finalidad de un proceso evaluatorio es reafirmar el progreso del alumnado en relación con los objetivos que se persiguen. Puede hacerse mediante la información suministrada por diversas pruebas orales y escritas realizadas durante los periodos lectivos o bien puntuando trabajos realizados por los alumnos en grupos de trabajo.

La evaluación del progreso del alumno en el presente tema podría hacerse de una forma globalizadora una vez vistas las estructuras algebraicas de grupo, anillo y cuerpo para comprobar si el alumno relaciona bien todos los conceptos acerca de las distintas estructuras algebraicas más comunes y sin cuya asimilación no podrá enfrentarse con la estructura de espacio vectorial.

Actividades de recuperación.

Obedecerán a las mismas premisas que ya hemos expuesto en los apartados de metodología y evaluación. En ningún caso el nivel exigido a los alumnos que deban realizar actividades de recuperación habrá de ser superior al exigido a los alumnos durante el normal proceso evaluatorio pues, entonces, algunos alumnos saldrían perjudicados. Ahora bien, por idénticas razones, el nivel que se exija durante la recuperación tampoco debe ser menor. Deberá buscarse un equilibrio para conseguir así que el mayor número de alumnos superen la evaluación del tema.

Se informará claramente a los alumnos de los aspectos más importante del tema para que éstos tengan presente en todo momento qué ideas deben repasar.

Recursos didácticos.

- Cuaderno de trabajo personal.
- Fichas resumen conteniendo las diversas propiedades de las estructuras algebraicas.
- Bibliografía sobre el tema.
- Problemas resueltos.

Temporalización.

En la enseñanza superior donde el temario de Algebra Lineal es bastante extenso se dedicarán dos semanas a ver la teoría de cuerpos y sus aplicaciones, con el estudio particular de los cuerpos de los números racionales, reales y complejos.